ΘΕΩΡΗΜΑ (ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ)

Έστω $A\subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $g: A\to\mathbb{R}^n$ 1-1 και $g\in C^1(A)$
με $\det Dg(y)\neq 0$ $\forall y\in A$
$T\subseteq A$ Jordan μετρήσιμο & συμπαγές
$f: g(T)\longrightarrow\mathbb{R}$ συνεχής $\Longrightarrow g(T)\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι J-μετρ.
και συμπαγές (με $\partial g(T)=g(\partial T)$) και

$$\int_{g(T)} f(x)\,dx = \int_T f(g(y))\cdot|\det Dg(y)|\,dy$$

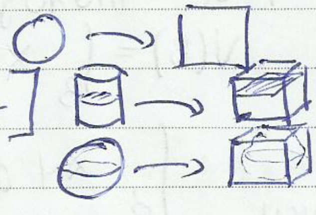
Πχ: στον $\mathbb{R}^1$

$g(y)=cy$, $c>0$ $\quad T=[a,\beta]$: $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(\beta)} f(x)\,dx = \int_a^\beta f(cy)\,c\,dy$

Στην πράξη έχουμε 4 μετασχηματισμούς μεταβλητών πολύ συνηθισμένους

① Στον $\mathbb{R}^n$: ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός
$x=g(y)=Ay+b$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ με $\det A\neq 0$
ενώ το $b\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^n$

② Στον $\mathbb{R}^2$: πολικές συντεταγμένες
[③ Στον $\mathbb{R}^3$: κυλινδρικές συντεταγμένες]
④ Στον $\mathbb{R}^3$: σφαιρικές συντεταγμένες



① ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός

$$\int_{g(T)} f(x)\,dx = \int_T f(Ay+b)\cdot|\det A|\,dy$$

αφού $Dg(y)=A$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΝΔΟ $V(B(x_0,r))=\int_{B(x_0,r)} 1\,dx$
$x_0\in\mathbb{R}^n$, $r>0$ $\quad B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n: \|x-x_0\|\le r\}$
Ποια η σχέση αυτού του περιεχομένου
με το περιεχόμενο της μπάλας $B(0,1)$
με $B(0,1)=\{y\in\mathbb{R}^n: \|y\|<1\}$;
Απ: $B(x,r)=B(0,r)+x_0 = r\,B(0,1)+x_0$

$= \{x : \|x_0 - x\| < r\} = \{y + x_0 : y \in B(0,r)\} =$
$= \{y + x_0 : \|y\| < r\}$.

Άρα, $\{x : \|x_0 - x\| < r\} = \{ry : y \in B(0,1)\} =$

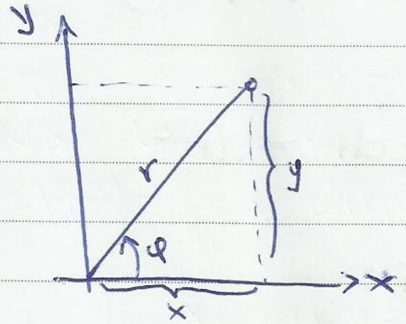
$= \{ry : \|y\| < 1\} = B(0,r) = \{x : \|x\| < r\}$

με $g(y) = rIy + x_0$

$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ έχουμε $\int_{B(x_0, r)} 1 \, dx = r^n \int 1 \, dy$

Αφού $\det(rI) = r^n$ (ΚΑΜ)

② πολικές συντεταγμένες



$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{g(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$g : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Η g αυτή ικανοποιεί τις υποθέσεις του (ΚΑΜ)

$$Dg(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} g_1 & \frac{\partial}{\partial \varphi} g_1 \\ \frac{\partial}{\partial r} g_2 & \frac{\partial}{\partial \varphi} g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \det Dg(r,\theta) = r$

$\rightarrow$ Αν $T = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$, τότε

$$\int_{g(T)} f(x,y)\, d(x,y) = \int_T f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d(r,\varphi) =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

Παρατήρηση:
Μέσω οριακής διαδικασίας αποδεικνύεται ότι ο πάνω τύπος ισχύει για T πιο γενικής μορφής

Πχ

$$B(0,r) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < r^2\}$$

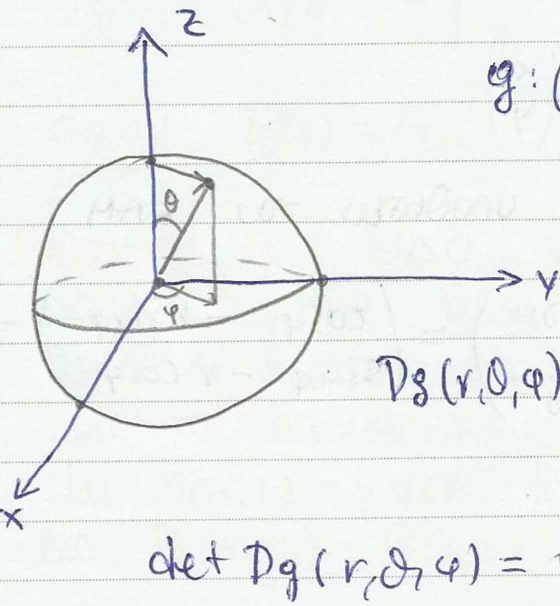
$$\int_{[0,r]\times[0,2\pi]} 1\, d(r,\varphi) = \int_{B(0,r)} 1\, d(x,y) = v(B(0,r))$$

$$\| $$

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} r\, d\varphi\, dr = \pi r^2$$

④ Σφαιρικές Συντεταγμένες:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta \cdot \cos\varphi \\ r\sin\theta \cdot \sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} =: g(r,\theta,\varphi)$$



$$g : (0,\infty) \times (0, \tfrac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$Dg(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det Dg(r,\theta,\varphi) = r^2 \sin\theta > 0$$